الشعبة: سنة ثالثة رياضيات	السنة الدراسية: 2026/2025
إختبار الفصل الثاني في مادة: الرياضيات	المدة: ساعتين

التمرين الأول: (05 نقاط)

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تمامًا، حدُّها الأول u_0 وأساسها q حيث:
$$\begin{cases} \ln(u_1) - \ln(u_3) = -4 \\ \ln(u_0) + \ln(u_4) = 10 \end{cases}$$

1. (ا) بين أن: $q = e^2$ و $u_0 = e$، ثم عبّر عن u_n بدلالة n.

(ب) من أجل كل عدد طبيعي n، نضع: $S_n = \ln(u_0) + \ln(eu_1) + \ln(e^2u_2) + \cdots + \ln(e^n u_n)$

- بين أن: $S_n = \dfrac{(n+1)(3n+2)}{2}$

2. من أجل كل عدد طبيعي n، نضع: $v_n = n - 1$

(ا) بيّن أن: $PGCD(2S_n; v_n) = PGCD(v_n; 10)$

(ب) أوجد القيم الممكنة لـ $PGCD(2S_n; v_n)$.

(ج) عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث: $PGCD(2S_n; v_n) = 5$

التمرين الثاني: (08 نقاط)

1. نعتبر المعادلة: $(E) \cdots 13x - 34y = 5$ ذات المجهولين الصحيحين x وy.

(ا) بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x\,;\,y)$ حلاً للمعادلة (E) فإن: $y \equiv 1\ [13]$، ثم حل المعادلة (E).

(ب) جد كل الثنائيات $(x\,;\,y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق: $|2y - x| \leq 9$

2. (ا) ادرس، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 13.

(ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد: $5n^2 - 4 + 1447^{x+2y}$ قابلاً للقسمة على 13، حيث $(x\,;\,y)$ حل للمعادلة (E).

3. عدد طبيعي λ يُكتب في نظام التعداد ذي الأساس 4 على الشكل: $\overline{\beta\alpha\alpha222}$ ويُكتب في نظام التعداد ذي الأساس 6 على الشكل: $\overline{\beta\alpha214}$

- عين α وβ، ثم اكتب λ في النظام العشري.

4. a و b عددان طبيعيان، و $d = PGCD\,(a;b)$ و $m = PPCM\,(a;b)$.

(ا) بيّن أن العدد 109 عدد أولي.

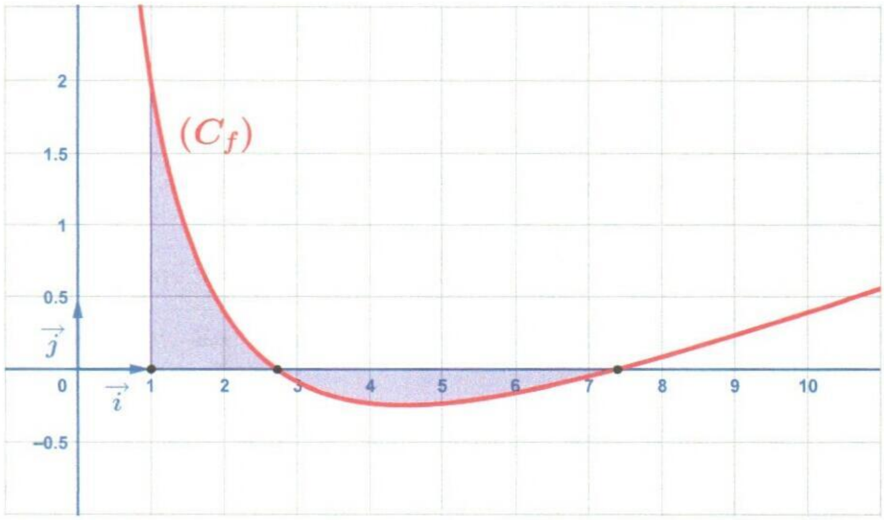
(ب) حلل العدد 1962 إلى جداء عوامل أولية، ثم عين الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 1962.

(ج) عين كل الثنائيات $(a\,;\,b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق: $m^2 - 7d^2 = 1962$

التمرين الثالث: (07 نقاط)

I) أوجد الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ حلّ المعادلة التفاضلية $y' = \dfrac{2\ln x - 3}{x}$، والتي تحقق: $g(1) = 2$

II) لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = 2 - 3\ln x + (\ln x)^2$، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، حيث $\|\vec{i}\| = 2\|\vec{j}\| = 1\,\text{cm}$.



1. حلّ في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة: $f(x) = 0$، ثم استنتج فاصِلتي نقطتي تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل.

2. (ا) تحقق أن الدالة H المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $H(x) = x\ln x - x$ دالة أصلية للدالة $x \longmapsto \ln x$.

   (ب) استنتج أن: $\int_1^e \ln x\, dx = 1$ و $\int_e^{e^2} \ln x\, dx = e^2$

3. باستعمال المكاملة بالتجزئة، بيّن أن: $\int_1^e (\ln x)^2\, dx = e - 2$ و $\int_e^{e^2} (\ln x)^2\, dx = 2e^2 - e$

4. استنتج القيمة المتوسطة m للدالة f على المجال $[1;e^2]$.

5. احسب A بوحدة $u.a$، ثم بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = 1$ و $x = e^2$

الإجابة النموذجية المقترحة لإختبار الثلاثي الثاني في مادة: الرياضيات - السنة الدراسية: 2026/2025 - الشعبة: سنة ثالثة رياضيات - المدة: ساعتين

عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموعة
التمرين الأول: (05 نقاط)		
1. (أ) إيجاد q و u_0 والتعبير عن u_n: لدينا $u_3=u_1q^2$، ومنه $\ln(u_1)-\ln(u_3)=-4$، أي $\ln\left(\frac{u_1}{u_3}\right)=-4$، ومنه $\ln(q^{-2})=-4$، إذن: $\boxed{q=e^2}$، ولدينا $u_4=u_0q^4$، ومنه $\ln(u_0)+\ln(u_4)=10$، معناه $\ln(u_0^2e^8)=10$، أي $2\ln(u_0)+8=10$، إذن: $\boxed{u_0=e}$ ولدينا $u_n=u_0q^n$، أي $u_n=e(e^2)^n$، ومنه: $\boxed{u_n=e^{2n+1}}$.	0.5 × 3	1.5
(ب) حساب S_n: نضع: $t_n=ln(e^nu_n)=ln(e^{3n+1})=3n+1$، ومنه $\boxed{S_n=\frac{(n+1)(3n+2)}{2}}$	0.5 × 2	1
2. (أ) إثبات علاقة الـ $PGCD$: لدينا $2S_n=3n^2+5n+2$، وبالقسمة على $v_n=n-1$ نجد: $2S_n=(3n+8)v_n+10$ إذن وحسب خوارزمية اقليدس نجد: $\boxed{PGCD(2S_n;v_n)=PGCD(v_n;10)}$.	0.5 × 2	1
(ب) القيم الممكنة لـ $d=PGCD(2S_n;v_n)$: لدينا $d=PGCD(2S_n;v_n)=PGCD(v_n;10)$، إذن: $\boxed{d\in\{1;2;5;10\}}$.	0.5	0.5
(ج) تعيين n بحيث $PGCD(2S_n;v_n)=5$: لدينا $PGCD(v_n;10)=PGCD(n-1;10)=5$، ومنه 5 يقسم $n-1$، أي $n-1=5k$ مع $k\in\mathbb{N}$، ومنه $PGCD(5k;10)=5$، أي $PGCD(k;2)=1$، ومنه $k=2t+1$ مع $t\in\mathbb{N}$، إذن بالتعويض نجد: $\boxed{n=10t+6}$	1	1
التمرين الثاني: (08 نقاط)		
1. (أ) حل المعادلة $13x-34y=5$: لدينا $34y=13x-5$، ومنه $34y\equiv-5\ [13]$، أي $34y\equiv34\ [13]$، إذن: $\boxed{y\equiv1\ [13]}$ لدينا $y=13k+1$، بالتعويض نجد: $x=34k+3$، إذن الحل العام: $\boxed{(x;y)=(34k+3\,;\,13k+1)}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.	0.5 × 3	1.5
(ب) الشرط $\lvert 2y-x\rvert\leq9$: لدينا $2y-x=-1-8k$، ومنه $\lvert -1-8k\rvert\leq9$، إذن: $k\in\{-1,0,1\}$ ومنه الثنائيات هي: $(-31;-12)$، $(3;1)$، و $(37;14)$.	1	1
2. (أ) بواقي 4^n بترديد 13: لدينا: $n=$: $6k$، $6k+1$، $6k+2$، $6k+3$، $6k+4$، $6k+5$، $k\in\mathbb{N}$ $4^n\equiv$: 1، 4، 3، 12، 9، 10، $[13]$	1	1
(ب) شرط القسمة على 13: لدينا $1447\equiv4[13]$ و $x+2y=60k+5=6(10k)+5$، ومنه $1447^{x+2y}\equiv10[13]$ إذن: $5n^2-4+10\equiv0[13]$، أي $5n^2+6\equiv0[13]$، معناه $n^2\equiv4[13]$، أي $n\equiv\pm2\ [13]$، إذن: $\boxed{n=13t+2}$ أو $\boxed{n=13t+11}$ مع $t\in\mathbb{N}$.	1	1

1.5	 0.5×3	3. إيجاد α و β: بتحويل λ إلى العشري نجد: $\begin{cases} \lambda = 1024\beta + 320\alpha + 42 \\ \lambda = 1296\beta + 216\alpha + 82 \\ 0 \leq \alpha \leq 3; \quad 0 \leq \beta \leq 3 \end{cases}$، ومنه $\begin{cases} 13\alpha - 34\beta = 5 \\ 0 \leq \alpha \leq 3; \quad 0 \leq \beta \leq 3 \end{cases}$، نستنتج أن: $\alpha = 3$، $\beta = 1$، و $\lambda = 2026$.
0.5	0.5	4. (أ) أولية 109: لا يقبل القسمة على أي عدد أولي أصغر من أويساوي $\sqrt{109}$، إذن هو عدد أولي.
0.5	 0.25×2	(ب) تحليل 1962: لدينا: $1962 = 2 \times 3^2 \times 109$، ومنه الأعداد التي مربعها يقسم 1962 هي: 1 و3.
1	 0.5×2	(ج) حل $m^2 - 7d^2 = 1962$: لدينا: $\begin{cases} md = ab \\ a = da'; \ b = db' \\ PGCD(a';b') = 1 \end{cases}$، ومنه $(da'b')^2 - 7d^2 = 1962$، أي $(a'b')^2 = \frac{1962}{d^2} + 7$، من أجل $d = 1$، نجد $a'b' = \sqrt{1969}$ (غير ممكن) من أجل $d = 3$، نجد $a'b' = 15$ ومنه الثنائيات هي: $(45;3)$، $(15;9)$، $(9;15)$، و$(3;45)$.
		التمرين الثالث: (07 نقاط)
1.5	 0.5×3	I) حل المعادلة التفاضلية: لدينا: $g'(x) = \frac{2\ln x - 3}{x} = \frac{2\ln x}{x} - \frac{3}{x}$، إذن: $g(x) = (\ln x)^2 - 3\ln x + C$، وبما أنّ $g(1) = 2$ و $\ln 1 = 0$، فإن: $C = 2$، إذن: $\boxed{g(x) = 2 - 3\ln x + (\ln x)^2}$.
1	 0.5×2	II) 1) حل المعادلة $f(x) = 0$: لدينا: $f(x) = 2 - 3\ln x + (\ln x)^2$، نضع $t = \ln x$ فنحصل على: $t^2 - 3t + 2 = 0$، أي: $(t-1)(t-2) = 0$، ومنه: $\ln x = 1$ أو $\ln x = 2$، إذن: $\boxed{x = e \text{ أو } x = e^2}$.
0.5	 0.5	2) (أ) إثبات أن H أصلية: لدينا: $H'(x) = \ln x + 1 - 1 = \boxed{\ln x}$، إذن H أصلية للدالة $x \longmapsto \ln x$.
1	 0.5×2	(ب) حساب التكاملين: $\int_1^e \ln x \, dx = H(e) - H(1) = e - e + 1 = \boxed{1}$، و $\int_e^{e^2} \ln x \, dx = H(e^2) - H(e) = \boxed{e^2}$.
1	 0.5×2	3) حساب تكامل $(\ln x)^2$: بالتجزئة: $\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x dx$، أي $\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x)$ ومنه بالتعويض نجد: $\int_1^e (\ln x)^2 dx = \boxed{e-2}$، و $\int_e^{e^2} (\ln x)^2 dx = \boxed{2e^2 - e}$.
1	 1	4) القيمة المتوسطة m: لدينا: $m = \frac{1}{e^2 - 1}\int_1^{e^2} f(x)\, dx$، و $\int_1^{e^2} f(x)\, dx = 2\int_1^{e^2} dx - 3\int_1^{e^2} \ln x \, dx + \int_1^{e^2} (\ln x)^2\, dx$، وباستعمال النتائج السابقة: $\int_1^{e^2} f(x)\, dx = \boxed{e^2 - 7}$، إذن: $\boxed{m = \frac{e^2 - 7}{e^2 - 1}}$.
1	 0.5×2	5) حساب المساحة A: $A = \int_1^e f(x)\, dx - \int_e^{e^2} f(x)\, dx$، وباستعمال النتائج السابقة: $\boxed{A = -e^2 + 6e - 7 \, u.a}$. بما أن $1\, u.a = \frac{1}{2} cm^2$، إذن: $\boxed{A = \frac{-e^2 + 6e - 7}{2} cm^2}$.